Конспект лекций по курсу

«Математическое моделирование в строительстве»

Содержание

1. Общие понятия о математическом моделировании

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо объекта, явления, процесса и т. п. с помощью математической символики.

Математическая символика – это на только привычные инженеру формулы, и другие математические объекты. Например, функции (степенные, тригонометрические, показательные, логарифмические и др.), интегралы (неопределенные и определенные), векторы, матрицы, тензоры, различные геометрические объекты (точки, прямые и кривые линии, плоские фигуры, объемные тела и т. д.).

В качестве примера использования математической символики рассмотрим решение силлогизма с помощью диаграммы Венна. Силлогизм – это высказывание, в котором на основании двух посылок делается логический вывод.

Силлогизм: Все люди смертны, Сократ – человек, следовательно Сократ смертен.

Математическая последовательность решение данного силлогизма следующая.

Сначала строятся пересекающиеся круги Венна, обозначающие множества: люди, смертные, Сократы. После этого последовательно заштриховываются области:

не смертные люди;

смертные не люди;

Сократы, не являющихся людьми;

люди не Сократы.

В оставшейся незаштрихованной центральной области остается только Сократ, принадлежащий к множеству смертных людей.

Цель создания математической модели – оказание помощи лицу, принимающему решение, путем обеспечения необходимой количественной информацией.

Задача математического моделирования – нахождение количественной информации об объекте моделирования, необходимой для принятия решения.

Метод математического моделирования – это метод приведения исследования объекта, явления, процесса к математическим задачам.

Математическая модель дает возможность производить теоретические расчеты, позволяющие дать ответы на поставленные вопросы.

Математические модели применяются в самых различных областях знания – технике, экономике, языкознании и др.

Эти задачи можно решать как аналитическими методами, так и численно на компьютере. При этом математическая модель представляется не только совокупностью формул, но и алгоритмом расчета по ним, например в виде расчетного программного комплекса.

Типичным примером математического моделирования является математическая физика – это теория математических моделей физических явлений. В курсе уравнений математической физики традиционно рассматриваются следующие задачи: колебания струны, продольные и поперечные колебания стержней, мембран, пластин, электрические колебания в длинных проводных линиях, уравнения теплопроводности и диффузии.

2. Этапы создания математических моделей

Этап 1. Возникновение и формулировка задачи.

Задачи математического моделирования ставят запросы практики.

Для получения требуемых ответов нужно найти взаимосвязь между исходными данными и результатами. Если при этом удается записать связь между данными и результатами в математической форме, то на этом первый этап заканчивается.

Таким образом, результат первого этапа – математическая формулировка задачи. А также определение необходимых исходных данных для последующего решения задачи. При этом используется знание математики и существующий опыт создания математических моделей.

Этап 2. Исследование задачи по математической модели, разработанной на первом этапе, получение аналитических и численных результатов.

На этом этапе выбирается метод решения задачи, причем используются как известные методы решения задач, так и создаются новые.

Этап 3. Сопоставление с данными наблюдений и экспериментов результатов и выводов, следующих из математической модели.

Часто на этом этапе для согласования расчетных данных с фактическими подбираются количественные параметры, которые не изменяют самой модели, но от которых зависят количественные результаты.

Если изменение параметров не приводит к согласованию результатов расчета с опытными данными, то модель нужно создавать заново.

Этап 4. Определение границ применимости математической модели.

На этом этапе определяются пределы, в которых могут изменяться исходные данные, чтобы найденные по математической модели результаты достаточно точно соответствовали действительности.

3. Число как элемент математической модели. Виды чисел.

Натуральные числа для счета предметов. Абстрагирование чисел от конкретных предметов. Число как самостоятельный математический объект. Отрицательные числа. Число ноль.

Действительные числа (другое название – вещественные числа) – это все рациональные и иррациональные числа.

Рациональные числа – это все целые и дробные числа: положительные, отрицательные и число ноль. Всякое рациональное число можно представить в виде отношения двух целых чисел.

Иррациональные числа – числа не представимые отношением двух целых чисел. Иррациональные числа подразделяются на два вида: алгебраические числа и трансцендентные числа.

Алгебраические числа являются корнями многочленов с целыми рациональными коэффициентами, например число $\sqrt{2}$.

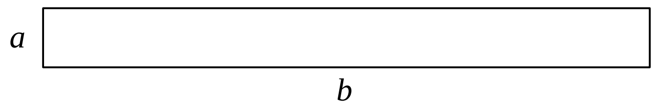
Трансцендентные числа – это иррациональные числа, не являющиеся алгебраическими. Это решения трансцендентных уравнений, например уравнений, содержащих тригонометрические, логарифмические и т. д. функции. Решением таких уравнений являются, например, числа π, e.

Комплексные числа (мнимые числа). Кватернионы – четырехсоставные числа. Гиперкомплексные числа – восьмисоставные (октонионы) и т. д. – получаются последовательным удвоением числа элементов в числе (2, 4, 8 …). В современной математике существуют и другие виды чисел.

4. Практические правила приближенных вычислений

4.1. Абсолютная и относительная погрешность числа. Понятие значащей цифры

Оценим погрешность вычисления площади прямоугольника с размерами $a = 10\,мм$ и $b = 90\,мм$.



Площадь такого прямоугольника $F = ab = 10 \cdot 90 = 900\,мм^2$.

При определении площади реального прямоугольника его размеры известны с погрешностью, зависящей от способа изготовления этого прямоугольника (прямоугольник ли это, или углы в нем не равны 90°, одинаковы ли размеры по всей длине и ширине и т.д.) и инструментов, которыми проведены измерения его размеров. Примем, что **абсолютная погрешность** (возможное отклонение числового значения какой-либо величины от ее истинного значения), с которой известны размеры прямоугольника $\pm 0{,}5\,мм$. Тогда $9{,}5 \le a \le 10{,}5\,мм$; $89{,}5 \le b \le 90{,}5\,мм$.

Относительная погрешность – это отношение абсолютной погрешности какой-либо величины к ее истинному значению.

В рассматриваемом примере

$$F_{\min} = 9{,}5 \cdot 89{,}5 = 850{,}25\,мм^2;\ F_{\max} = 10{,}5 \cdot 950{,}5 = 950{,}25\,мм^2$$

Таким образом,

$$F = 900 \pm 50\,мм^2 \text{ или } 900\,мм^2 \pm 5{,}56\%$$

Исходные данные в данном случае известны с двумя значащими цифрами. **Значащие цифры** – это все верные цифры числа, кроме нулей, стоящих слева. Количество нулей слева зависит от размерности, в которой записано число:

$$a = 10\,мм = 1{,}0\,см = 0{,}010\,м = 1{,}0 \cdot 10^{-2}\,м = 1{,}0 \cdot 10^{-5}\,км;$$

$$b = 90\,мм = 9{,}0\,см = 0{,}090\,м = 9{,}0 \cdot 10^{-2}\,м = 9{,}0 \cdot 10^{-5}\,км.$$

Определим относительную погрешность произведения двух чисел a и b, заданных с абсолютными погрешностями Δa и Δb:

$$(a + \Delta a)(b + \Delta b) = a\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) b \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) = ab\left(1 + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}\right) \approx$$

$$\approx ab\left(1 + \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

Произведение малых относительных погрешностей $\frac{\Delta a}{a}$ и $\frac{\Delta b}{b}$ является малой более высокого порядка по сравнению с самими погрешностями и ей можно пренебречь. Следовательно, **относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей**:

$$\frac{(a+\Delta a)(b+\Delta b)-ab}{ab} \approx \frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}$$

Аналогично определяется **относительная погрешность при делении** чисел:

$$\frac{(a+\Delta a)}{(b+\Delta b)}=\frac{a(1+\frac{\Delta a}{a})}{b(1+\frac{\Delta b}{b})}=\frac{a}{b}\frac{(1+\frac{\Delta a}{a})}{(1+\frac{\Delta b}{b})}\approx\frac{a}{b}(1+\frac{\Delta a}{a})(1-\frac{\Delta b}{b})=$$

$$=\frac{a}{b}\left(1+\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}-\frac{\Delta a}{a}\frac{\Delta b}{b}\right)\approx\frac{a}{b}\left(1+\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b}\right)$$

Здесь учтено разложение в ряд $\frac{1}{1+x}\approx 1-x$ при $x<<1$. С учетом, что абсолютные погрешности Δa и Δb могут иметь разные знаки, можно считать, что при делении, как и при умножении, **максимально возможная относительная погрешность при делении равна сумме относительных погрешностей делимого и делителя**.

Относительная погрешность при сложении:

$$(a+\Delta a)+(b+\Delta b)=(a+b)+(\Delta a+\Delta b)=$$

$$=(a+b)\left(1+\frac{\Delta a}{a+b}+\frac{\Delta b}{a+b}\right)<(a+b)\left(1+\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b}\right)$$

Сопоставление полученного результата с относительными погрешностями при умножении и делении показывает, что при **сложении можно пользоваться той же формулой для оценки погрешности результата, что и умножения или деления**.

Относительная погрешность при вычитании:

$$(a+\Delta a)-(b+\Delta b)=(a-b)+(\Delta a-\Delta b)=(a-b)\left(1+\frac{\Delta a-\Delta b}{a-b}\right)$$

Если разность $(a-b)\to 0$, то погрешность результата может быть очень большой. В этом заключается **проблема потери значащих цифр при вычитании близких чисел**.

Пример. Изменение точности результата при удержании в расчете различного числа значащих цифр.

$$\begin{aligned}\sin 45^{\circ}-\sin 44^{\circ} &= 0{,}7-0{,}7=0\\ &=0{,}71-0{,}69=0{,}02\\ &=0{,}707-0{,}695=0{,}012\\ &=0{,}70711-0{,}6947=0{,}0124\\ &=0{,}70711-0{,}69466=0{,}01245\end{aligned}$$

Чтобы избежать потери точности, в частности, **при делении на разность близких чисел**, формулу нужно преобразовать так, чтобы операции вычитания не было:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{45^{\circ}+44^{\circ}}{2}\sin\frac{45^{\circ}-44^{\circ}}{2} =$$

$$= 2\cos 44{,}5^{\circ}\sin 0{,}5^{\circ} = 2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}009 = 0{,}0126$$

$$= 2\cdot 0{,}71\cdot 0{,}0087 = 0{,}0124$$

$$= 2\cdot 0{,}713\cdot 0{,}00873 = 0{,}01245$$

В качестве второго способа можно использовать разложение функции в ряд:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!}\frac{df}{dx}\bigg|_{x=x_0}\Delta x + + \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{x=x_0}\Delta x^2 + \ldots$$

При удержании одного члена ряда

$$\sin\alpha - \sin(\alpha-\Delta\alpha) = \sin\alpha - (\sin\alpha + \cos\alpha\cdot(-\Delta\alpha) + \ldots) =$$

$$= \cos\alpha\cdot\Delta\alpha = \cos 45^{\circ}\cdot 1^{\circ}\,\frac{\pi}{180^{\circ}} = 0{,}0123413$$

Угол $\Delta\alpha$ подставляется в формулу в радианах. Погрешность результата тем меньше, чем меньше $\Delta\alpha$ и чем большее число членов ряда удерживается.

4.2. Практические правила приближенных вычислений

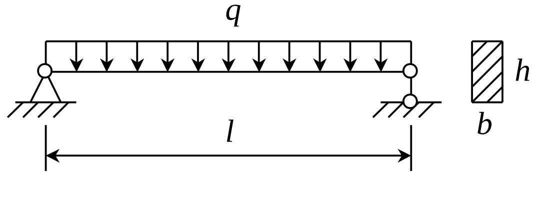
1. Вычисления нужно вести с удержанием определенного количества значащих цифр, одинакового для всех чисел.
2. Число значащих цифр в процессе расчета принимается не менее чем на одну больше, чем в исходных данных, имеющих наименьшую точность. Окончательный результат округляется до минимального числа значащих в исходных данных.

Эти правила фактически реализуются при выполнении расчетов на компьтере, поскольку в компьютере числа хранятся и обрабатываются в форме с так называемой плавающей десятичной точкой: [знак числа] [определенное количество значащих цифр числа] [знак порядка] [порядок числа].

Например: $\pi = +\,0{,}31415926\cdot 10^{+01}$.

В технических задачах **исходные данные обычно задаются с двумя значащими цифрами,** поэтому и **результат имеет такую же точность.**

Пример. Расчет прогиба балки под действием равномерно распределенной нагрузки.



q = 600 кг/м; l = 6 м; b = 200 мм; h = 300 мм; Е = $1 \cdot 10^4$ МПа;

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3^3}{12} = 6{,}75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4;$$

$$f = \frac{5ql^4}{384EI} = \frac{5 \cdot 6000 \cdot 6^4}{384 \cdot 1 \cdot 10^{10} 6{,}75 \cdot 10^{-4}} = 0{,}015 \text{ м} = 15 \text{ мм}; \quad \frac{f}{l} = \frac{0{,}015}{6} = \frac{1}{400}$$

Решение практических задач часто выполняется **методом последовательных приближений**. При этом поправка к численному решению на каждом последующем приближении (шаге решения) убывает по величине.

Оценим, как влияет число шагов последовательных приближений (итераций) на точность результата. При убывании поправок на каждом шаге по закону геометрической прогрессии со знаменателем 1/2 суммарный результат

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-1/2} = 2;$$

где $a_1 = 1$ – первый член прогрессии; $q = \frac{1}{2}$ – знаменатель прогрессии.

Для рассмотренной прогрессии при удержании конечного числа членов ряда до $\frac{1}{2^n}$ включительно, погрешность результата суммирования в два раза больше первого отброшенного члена $\frac{1}{2^{n+1}}$:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} \ldots =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2$$

В качестве примера отбросим все члены ряда, которые меньше 0,001. Тогда $\frac{1}{2^n} > 0{,}001 \to 2^n < 1000 \to n < 10$:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} = 1.998$$

Величина первого отброшенного члена ряда $\frac{1}{1024} \approx 0{,}001$, а ошибка результата 0,002.

Оценивать точность суммы ряда по величине первого отброшенного члена ряда не всегда достоверно. В общем случае произвольного ряда оценка погрешности выполняется методами теории рядов. При суммировании рядов для получения заданного числа верных значащих цифр в промежуточных расчетах часто приходится удерживать на 2-4 значащие цифры больше.

Примеры для самостоятельного решения.

Вычислить сумму ограничившись конечным числом членов ряда.

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots = \infty$ – несмотря на то, что члены ряда убывают, этот ряд расходится.

Для оценки результата необходимо использовать признаки сходимости рядов.

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \ln 2$$

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Простейшая программа для вычисления суммы m членов данного ряда в Visual Basic имеет вид:

```
S = 0
m = CELLS (1,1)
FOR n = 1 TO m STEP 1
S = S +1/n^2
NEXT n
CELLS (1,2)
```

5. Комплексные числа

5.1. Алгебраическая форма комплексного числа

$$z = a + ib; \quad i^2 = -1; \quad i = \pm\sqrt{-1}$$

Сопряженные комплексные числа

$$z_1 = a + ib \text{ и } z_2 = a - ib$$

или

$$z = a \pm ib,$$

где a, b – действительные числа, a – действительная часть числа, b – мнимая часть числа.

Сложение комплексных чисел

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

Умножение комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

где учтено, что $i^2 = -1$.

Деление комплексных чисел

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a + ib}{c + id} = x + iy$$

При этом $z_2 \neq 0$, то есть $c \neq 0$ и $d \neq 0$ одновременно. Числа x и y определяются из условия, что число z_3 такое, что $z_3 \cdot z_2 = z_1$:

$$(x+iy)(c+id) = a+ib \to (cx-dy)+i(cy+dx) = a+ib$$
$$cx-dy = a$$
$$dx+cy = b$$

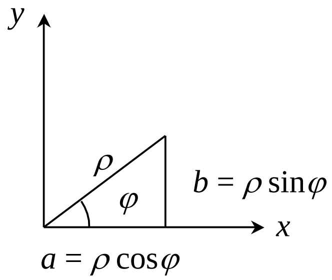
откуда

$$x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}; \quad y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

5.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

$$z = a+ib = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $tg\varphi = \frac{b}{a}$



5.3. Показательная форма комплексного числа

Разложение в ряд показательной и тригонометрических функций имеет вид:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Учитывая, что $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=(i^2)^2=1$, получаем

$$\cos x+i\sin x=e^{ix}$$

При $x=\pi$ отсюда следует $e^{i\pi}=-1$.

Показательная форма комплексного числа имеет вид

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho e^{i\varphi}$$

Степени и корни комплексного числа

$$z^n=(\rho e^{i\varphi})^n=\rho^n e^{in\varphi}=\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}=\rho^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\varphi}{n}}=\sqrt[n]{\rho}(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n})$$

Умножение и деление комплексных чисел

$$z_1\cdot z_2=\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=\rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2}=z_1\cdot z_2^{-1}=\rho_1\rho_2^{-1}e^{i\varphi_1}e^{-i\varphi_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Примеры

Пример 1. Вычислить $\sqrt{z}$.

$$\sqrt{z}=\sqrt{\rho}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})$$

если $z=i$, то есть $z=0+i\cdot 1$, то $a=0$, $b=1$, $\rho=\sqrt{a^2+b^2}=1$,

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{0}=\infty,\quad \varphi=\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\ldots$$

$$\sqrt{i}=\sqrt{\sqrt{-1}}=\sqrt[4]{-1}=\begin{Bmatrix} \sqrt{1}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{1}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{1}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{1}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{Bmatrix}$$

Полученный результат представляет собой все корни уравнения $x^4+1=0$.

Пример 2. Найти все корни уравнения $x^n-1=0$.

Это уравнение имеет *n* корней:

$$\sqrt[n]{1}=1\cdot(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n});\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$\sqrt{1}=\sqrt[2]{1}=\pm1 \text{ – два корня.}$$

$$\sqrt[3]{1}=\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \text{ – три корня.}$$

Пример 3. Найти все корни уравнения $x^n+1=0$.

Это уравнение также имеет *n* корней:

$$\sqrt[n]{-1}=1\cdot(\cos\frac{(2k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n});\quad k=0,1,2,\ldots$$

$$\sqrt{-1}=\sqrt[2]{-1}=\pm i \text{ – два корня.}$$

$$\sqrt[3]{-1}=\begin{Bmatrix} -1 \\ \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2} \end{Bmatrix} \text{ – три корня.}$$

Пример 4. Найти все корни уравнения $x^4-1=0$.

Это уравнение также имеет 4 корня:

$$\sqrt[4]{1} = \begin{cases} \sqrt[2]{1} = \pm 1 \\ \sqrt[2]{-1} = \pm i \end{cases}.$$

Проверить результат можно, представив заданное уравнение в виде разложения на множители:

$$x^4 - 1 = 0 \to (x-1)(x+1)(x-i)(x+i) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - i^2) = 0 \to (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \to x^4 - 1 = 0$$

6. Правила составления общего решения обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Решением уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-2} \frac{d^2 y}{dx^2} + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

является сумма n линейно-независимых частных решений. Вид общего решения зависит от вида корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-2} \lambda^2 + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 .$$

Если дифференциальное уравнение имеет только действительные коэффициенты, то комплексные корни характеристического уравнения встречаются только сопряженными парами.

1. Если все корни характеристического уравнения действительные и различные, то общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x}$$

2. Если $\lambda_k = \lambda_{k+1}$ – двукратный действительный корень, то соответствующий ему член общего решения

$$(C_k + C_{k+1} x) e^{\lambda_k x}$$

3. Если $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}$ – трехкратный действительный корень, то соответствующий член общего решения

$$(C_k + C_{k+1} x + C_{k+2} x^2) e^{\lambda_k x}$$

и т. д.

4. Каждой паре комплексных сопряженных корней $\lambda_{k,k+1} = \alpha \pm i\beta$ соответствует член общего решения

$$e^{\alpha x}(C_k \cos\beta x + C_{k+1} \sin\beta x)$$

5. Если сопряженные комплексные корни встречаются двукратно $\lambda_{k,k+1,k+2,k+3} = \alpha \pm i\beta$, то соответствующий член общего решения

$$e^{\alpha x}[(C_k + C_{k+1}x)\cos\beta x + (C_{k+2} + C_{k+3}x)\sin\beta x]$$

и т. д.

Аналогично составляется общее решение и в остальных вариантах корней характеристического уравнения.

7. Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах расчета строительных конструкций

7.1. Дифференциальное уравнение изгиба балки

Согласно гипотезе плоских сечений (гипотеза Бернулли) кривизна изгибаемой балки (величина обратно пропорциональная радиусу кривизны ρ) прямо пропорциональна изгибающему моменту и обратно пропорциональна изгибной жесткости, равной произведению модуля упругости на соответствующий осевой момент инерции:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}.$$

При малых прогибах балки кривизна с достаточной точностью равна второй производной от уравнения изогнутой оси $V(z)$ по продольной координате z:

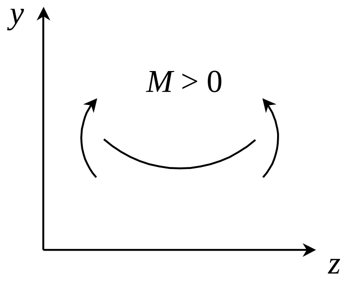
$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{V''}{\sqrt{(1+(V')^2)^3}} \approx \pm V'',$$

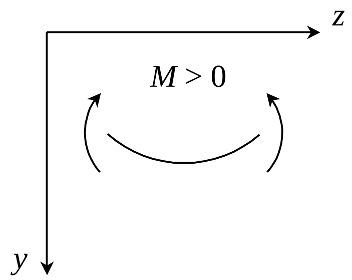
где первая производная $V'(z)$ от уравнения изогнутой оси балки при малых прогибах пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Вторая производная $V''(z)$ может быть как положительной, так и отрицательной, поэтому знак в формуле кривизны выбирается так, чтобы радиус кривизны был положительным.

Таким образом, дифференциальное уравнение, связывающее уравнение изогнутой оси балки с уравнением изгибающий моментов, имеет вид:

$$V'' = \pm\frac{M}{EI}.$$

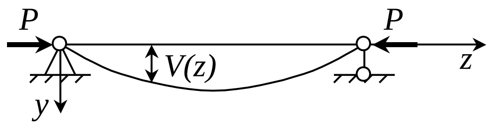
Знак в формуле согласует правила знаков для изгибающих моментов и кривизны. Положительный изгибающий момент изгибает балку так, что выпуклость изогнутой оси располагается со стороны растянутых волокон. А знак второй производной зависит от направления выпуклости графика функции по отношению к положительному направлению оси ординат.





$$V'' > 0\,; \quad V'' = +\frac{M}{EI} \qquad\qquad V'' < 0\,; \quad V'' = -\frac{M}{EI}$$

7.2. Сжато-изогнутый стержень



При выводе дифференциальных уравнений, чтобы избежать ошибок в знаках, все входящие величины должны быть, по возможности, положительными. Изгибающий момент в сжато-изогнутом стержне

$$M = P \cdot V(z)$$

Подстановка изгибающего момента в основное дифференциальное уравнение изгиба дает дифференциальное уравнение

$$V'' = -\frac{P}{EI}V$$

или

$$V'' + k^2 V = 0$$

где $k^2 = \dfrac{P}{EI}$

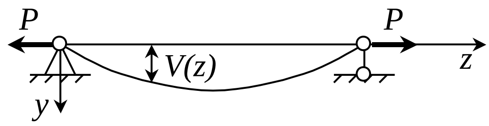
Характеристическое уравнение для полученного дифференциального уравнения

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

имеет два сопряженных комплексных корня $\lambda_{1,2} = \pm ik$. В соответствии с видом полученных корней общее решение данного дифференциального уравнения

$$V = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz$$

7.3. Растянуто-изогнутый стержень



В отличие от сжато-изогнутого стержня положительная продольная сила направлена на растяжение. Изгибающий момент в растянуто-изогнутом стержне

$$M = -P \cdot V(z)$$

Подстановка изгибающего момента в основное дифференциальное уравнение изгиба дает дифференциальное уравнение

$$V'' = \frac{P}{EI} V$$

или

$$V'' - k^2 V = 0$$

где $k^2 = \dfrac{P}{EI}$

Характеристическое уравнение для полученного дифференциального уравнения

$$\lambda^2 - k^2 = 0$$

имеет два действительных различных корня $\lambda_{1,2} = \pm k$. В соответствии с видом полученных корней общее решение данного дифференциального уравнения

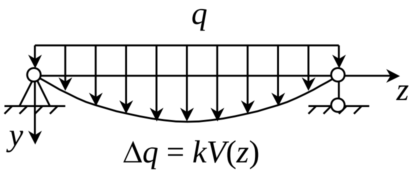
$$V = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

или, с учетом произвольности постоянных в общем решении дифференциального уравнения,

$$V = C_1 \operatorname{ch} kz + C_2 \operatorname{sh} kz\,,$$

где $\operatorname{ch} kz = \dfrac{e^{kz} + e^{-kz}}{2}$; $\operatorname{sh} kz = \dfrac{e^{kz} - e^{-kz}}{2}$ – гиперболический косинус и гиперболический синус.

7.4. Изгиб балки нагрузкой, пропорциональной прогибу

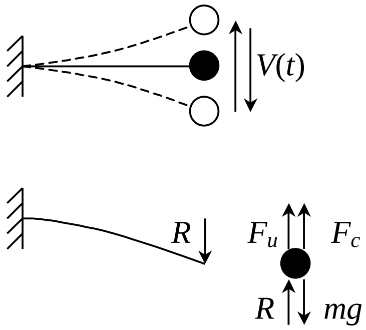


$$\frac{d^4V}{dz^4} - \alpha^4 V = 0; \quad \lambda^4 - \alpha^4 = 0; \quad \lambda^2 = \pm\sqrt{\alpha^4} = \pm\alpha^2;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha^2} = \pm\alpha; \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{-\alpha^2} = \pm i\alpha;$$

$$V = C_1 \cos\alpha z + C_2 \sin\alpha z + C_3 \mathrm{ch}\alpha z + C_4 \mathrm{sh}\alpha z$$

7.5. Колебания системы с одной степенью свободы с учетом сопротивления



Если принять положительное перемещение $V(t)$ колеблющейся массы вниз, то положительная скорость $\dot{V}(t)$ и положительное ускорение $\ddot{V}(t)$ также направлены вниз. В этом случае положительная упругая восстанавливающая сила, действующая на массу со стороны балки $R = \dfrac{V(t)}{\delta_{11}}$ направлена вниз для балки и вверх для массы. Коэффициент δ_{11} – это перемещение точки приложения массы от единичной силы, приложенной по направлению колебаний массы. Вес массы mg направлен вниз. Сила сопротивления колебаниям $F_c = k \cdot \dot{V}(t)$ прямо пропорциональна скорости колебаний и направлена противоположно вектору скорости. Сила инерции $F_u = m \cdot \ddot{V}(t)$ равна произведению массы на ускорение и направлена противоположно вектору ускорения.

Для составления уравнения движения составляется уравнение равновесия всех приложенных к колеблющейся массе сил, включая силу инерции:

$$m\ddot{V} + k\dot{V} + \frac{1}{\delta_{11}}V = mg$$

или

$$\ddot{V} + 2\alpha\dot{V} + \beta V = g$$

где для удобства записи дальнейшего решения введены обозначения

$$2\alpha = \frac{k}{m}; \quad \beta = \frac{1}{m\delta_{11}}$$

Вид общего решения однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{V} + 2\alpha\dot{V} + \beta V = 0$$

зависит от вида корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \beta}$$

Частные случаи

1. $\alpha^2 < \beta$ – затухающие колебания с малым сопротивлением: $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\beta - \alpha^2} > 0$.

$$V = e^{-\alpha t}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)$$

С учетом обозначений $C_1 = A_0 \sin\varphi_0; \quad C_2 = A_0 \cos\varphi_0$

$$V = A_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

где A_0, φ_0 – новые произвольные постоянные (амплитуда и начальная фаза колебаний).

2. $\alpha = 0$ – колебания без сопротивления (незатухающие колебания): $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, где $\omega = \sqrt{\beta} > 0$.

$$V = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

С учетом обозначений $C_1 = A_0 \sin\varphi_0; \quad C_2 = A_0 \cos\varphi_0$

$$V = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

3. $\alpha^2 > \beta$ – демпфирование колебаний большой силой сопротивления:

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta} < 0; \quad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta} < 0$$

$$V = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

4. $\alpha^2 = \beta$ – случай равных корней: $\lambda_{1,2} = -\alpha$

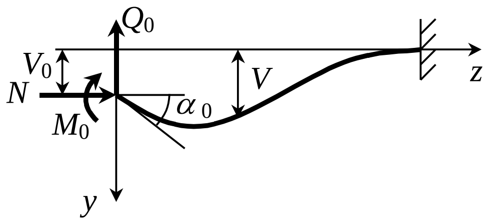
$$V = (C_1 + C_2 t) e^{-\alpha t}$$

8. Метод начальных параметров А. Н. Крылова для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

При решении задач изгиба балок для различных случаев нагружения произвольные постоянные в общем решении дифференциального уравнения изгиба определяются из граничных условий (условий на двух концах балки – в начале балки и в конце).

Можно преобразовать общее решение так, что произвольные постоянные будут выражены через величины, заданные в начале балки – начальные параметры. Но определяться эти начальные параметры будут из граничных условий на обоих концах балки.

Для пояснения вывода уравнений изгиба балки в форме метода начальных параметров рассматривается сжато-изогнутый стержень.



$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{M}{EI}; \quad M = M_o + Q_0 z + N(V - V_0);$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{1}{EI}(M_0 + Q_0 z + N(V - V_0)); \quad \frac{d^4V}{dz^4} = -\frac{N}{EI}V; \quad \frac{d^4V}{dz^4} + k^2 V = 0;$$

$$V = C_1 + C_2 z + C_3 \cos kz + C_4 \sin kz$$

Функции $V_1 = 1$; $V_2 = z$; $V_3 = \cos kz$; $V_4 = \sin kz$ являются частными решениями однородного дифференциального уравнения. Из них составляются новые 4 функции u_1, u_2, u_3, u_4 путем линейной комбинации функций V_i:

$$u_1 = C_{11} \cdot 1 + C_{12} z + C_{13} \cos kz + C_{14} \sin kz$$
$$u_2 = C_{21} \cdot 1 + C_{22} z + C_{23} \cos kz + C_{24} \sin kz$$
$$u_3 = C_{31} \cdot 1 + C_{32} z + C_{33} \cos kz + C_{34} \sin kz$$
$$u_4 = C_{41} \cdot 1 + C_{42} z + C_{43} \cos kz + C_{44} \sin kz$$

Коэффициенты C_{ij} определяются из следующих условий:

$$u_1(0) = 1;\ u_1'(0) = 0;\ u_1''(0) = 0;\ u_1'''(0) = 0;$$
$$u_2(0) = 0;\ u_2'(0) = 1;\ u_2''(0) = 0;\ u_2'''(0) = 0;$$
$$u_3(0) = 0;\ u_3'(0) = 0;\ u_3''(0) = 1;\ u_3'''(0) = 0;$$
$$u_4(0) = 0;\ u_4'(0) = 0;\ u_4''(0) = 0;\ u_4'''(0) = 1.$$

Производные от новых функций

$$u_i = C_{i1} \cdot 1 + C_{i2} z + C_{i3} \cos kz + C_{i4} \sin kz;$$
$$u_i' = C_{i2} - C_{i3} k \sin kz + C_{i4} k \cos kz;$$
$$u_i'' = -C_{i3} k^2 \cos kz - C_{i4} k^2 \sin kz;$$
$$u_i''' = C_{i3} k^3 \sin kz - C_{i4} k^3 \cos kz.$$

Общее решение дифференциального уравнения записывается в виде:

$$V = D_1 u_1 + D_2 u_2 + D_3 u_3 + D_4 u_4,$$

где D_i – новые произвольные постоянные.

Таким образом, для определения 16 коэффициентов C_{ij} имеется 16 уравнений:

$$u_1(0) = C_{11} + C_{13} = 1;$$
$$u_1'(0) = C_{12} + C_{14} k = 0;$$
$$u_1''(0) = -C_{13} k^2 = 0;$$
$$u_1'''(0) = -C_{14} k^3 = 0;$$

откуда $C_{11} = 1$, $C_{12} = C_{13} = C_{14} = 0$; $u_1 = 1$.

$$u_2(0) = C_{21} + C_{23} = 0;$$
$$u_2'(0) = C_{22} + C_{24} k = 1;$$
$$u_2''(0) = -C_{23} k^2 = 0;$$
$$u_2'''(0) = -C_{24} k^3 = 0;$$

откуда $C_{21} = 0$, $C_{22} = \dfrac{1}{k}$, $C_{23} = C_{24} = 0$; $u_2 = \dfrac{z}{k} = \dfrac{kz}{k^2}$.

$$u_3(0) = C_{31} + C_{33} = 0;$$
$$u_3'(0) = C_{32} + C_{34}k = 0;$$
$$u_3''(0) = -C_{33}k^2 = 1;$$
$$u_3'''(0) = -C_{34}k^3 = 0;$$

откуда $C_{31} = \dfrac{1}{k^2}$, $C_{32} = 0$, $C_{33} = -\dfrac{1}{k^2}$, $C_{34} = 0$; $u_3 = \dfrac{1}{k^2}(1 - \cos kz)$.

$$u_4(0) = C_{41} + C_{43} = 0;$$
$$u_4'(0) = C_{42} + C_{44}k = 0;$$
$$u_4''(0) = -C_{43}k^2 = 0;$$
$$u_4'''(0) = -C_{44}k^3 = 1;$$

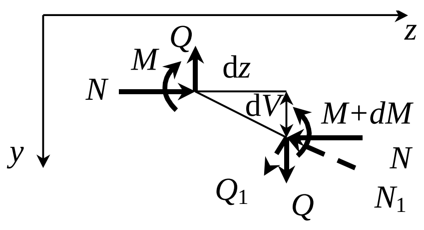
откуда $C_{41} = 0$, $C_{42} = \dfrac{1}{k^2}$, $C_{43} = 0$, $C_{44} = -\dfrac{1}{k^3}$; $u_4 = \dfrac{1}{k^3}(kz - \sin kz)$.

После определения функций u_i общее решение дифференциального уравнения

$$V = D_1 \cdot 1 + D_2 \frac{1}{k^2} kz + D_3 \frac{1}{k^2}(1 - \cos kz) + D_3 \frac{1}{k^3}(kz - \sin kz).$$

Произвольные постоянные D_i выражаются через начальные параметры из начальных условий:

$$z = 0, \quad V = V_0 = D_1,$$
$$z = 0, \quad V' = \alpha_0 = D_2 \frac{1}{k} + D_3 \frac{1}{k} \sin kz + D_4 \frac{1}{k^2}(1 - \cos kz)\Big|_{z=0} = \frac{D_2}{k},$$
$$z = 0, \quad V'' = -\frac{M_0}{EI} = D_3 \cos kz + D_4 \frac{1}{k} \sin kz\Big|_{z=0} = D_3,$$



$$NdV + M + Qdz - (M + dM) = 0, \quad \frac{dM}{dz} = Q + N\frac{dV}{dz},$$
$$V''' = -\frac{1}{EI}\frac{dM}{dz} = -\frac{Q}{EI} - \frac{N}{EI}V', \quad \frac{N}{EI} = k^2,$$

$$z = 0, \quad V''' = -\frac{Q_0}{EI} - \frac{N}{EI} V_0' = -D_3 k \sin kz + D_4 \cos kz\Big|_{z=0} = D_4 .$$

Замечание. Если вместо проекций сил N и Q на координатные оси в недеформированном состоянии рассматривать проекции на направление касательной и нормали к изогнутой оси в деформированном состоянии N_1 и Q_1, то имеют место формулы

$$\alpha = \frac{dV}{dz} = V', \quad \sin\alpha = \alpha = V', \quad \cos\alpha = 1, \quad N_1 = N\cos\alpha - Q\sin\alpha = N - QV',$$

$$Q_1 = Q\cos\alpha + N\sin\alpha = Q + NV' = (-EI\,V''' - NV') + NV' = -EI\,V''' .$$

Из полученных соотношений $D_1 = V_0$, $D_2 = k\alpha_0$, $D_3 = -\frac{M_0}{EI}$, $D_4 = -\frac{Q_0}{EI} - k^2\alpha_0$.

После подстановки D_i

$$V = V_0 + \frac{\alpha_0}{k} kz - \frac{M_0}{k^2 EI}(1 - \cos kz) - \left(\frac{Q_0}{k^3 EI} + \frac{\alpha_0}{k}\right)(kz - \sin kz) .$$

или, в окончательном виде,

$$V = V_0 + \frac{\alpha_0}{k}\sin kz - \frac{M_0}{k^2 EI}(1 - \cos kz) - \frac{Q_0}{k^3 EI}(kz - \sin kz),$$

$$V' = \alpha_0 \cos kz - \frac{M_0}{kEI}\sin kz - \frac{Q_0}{k^2 EI}(1 - \cos kz),$$

$$M = -EIV'' = \alpha_0 kEI \sin kz + M_0 \cos kz + \frac{Q_0}{k}\sin kz,$$

$$Q = \frac{dM}{dz} - NV' = Q_0 = const .$$

При $z = 0$ $V = V_0$, $V' = \alpha_0$, $M = M_0$, $Q = Q_0$.